MATHEMATICS MODEL PAPER

THIRD SEMESTER – ABSTRACT ALGEBRA

COMMON FOR B.A &B.Sc

(w.e.f. 2015-16 admitted batch)

Time: 3 Hours **Maximum Marks: 75**

SECTION-A

Answer any **FIVE** questions. Each question carries **FIVE** marks. **5 x 5 = 25 Marks**

1. Show that a group G is abelian if and only if $(ab)^2 = a^2b^2$ ∀a,b ∈ G.
2. Define order of an element in a group and prove that in a group G, O (a) = O(a^{-1}) for a ∈ G.
3. Prove that intersection of two sub groups of a group G is a sub group of G.
4. Show that a sub group H of a group G is normal iff $xHx^{-1} = H$ ∀ x ∈ G.
5. Show that the mapping f: G→ G such that f(a) = a^{-1} ∀a ∈ G is an automorphism of a group G iff G is abelian.
6. If f is a homomorphism of a group G in to a group G′ then prove that Kernel of f is a normal sub group of G.
7. Express the product (2 5 4)(1 4 3)(2 1) as a product of disjoint cycles and find its inverse.
8. Prove that an ifinite cyclic group has exactly two generators.

SECTION-B

Answer the all **FIVE** questions. Each carries TEN marks. **5 x 10 = 50 Marks**

9 (a). Show that a finite semi group satisfying cancellation laws is a group.

Or

9 (b). Show that the set G of rational numbers other than 1 is an abelian group with respect to the operation⊕ defined by a ⊕b = a+b-ab ∀a,b ∈ G.

10 (a).Prove that the necessary and sufficient condition for a non empty sub set H of a group G to be a sub group is that a, b∈ H ⇒ ab^{-1} ∈ H.

Or

10 (b). State and prove Lagrange's theorem.

11 (a).If H is a normal sub group of a group G then prove that the set G/H of all cosets of H in G is a group with respect to coset multiplication.

Or

11(b). Prove that a sub group H of a group G is a normal sub group of G iff the product of two right cosets of H in G is again a right coset of H in G.

12(a). If f is a homomorphism of a group G in to a group G′ then prove that f is an into isomorphism iff ker f = {e}.

Or

12(b). State and prove Fundamental theorem on homomorphism.

13(a). State and prove Cayley's theorem.

Or

13(b). Prove that every sub group of a cyclic group is cyclic.

Dr. K. L. Saraswathi Devi

2016-17

[Total No. of Printed Pages-4

[CB-BA328/CB-BS332]

AT THE END OF THIRD SEMESTER (CBCS PATTERN) DEGREE EXAMINATIONS

MATHEMATICS - III - ABSTRACT ALGEBRA

(COMMON FOR B.A.,B.Sc)

(From The Admitted Batch of 2015-2016)

Time : 3 Hours   Maximum : 75 Marks

PART - A

విభాగము - ఎ

Answer any **five** questions.   **(5×5=25)**

ఈ క్రింది వానిలో ఏవేని **ఐదు** ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

1. Show that every group of order Two is an abelian group.

   ప్రతీ సమూహాము యొక్క పరిమాణము రెండు అయినచో అది ఎబిలియన్ సమూహమని చూపండి.

2. Show that the 4th roots of unity form an abelian group w.r. to multiplication.

   1 యొక్క నాలుగవ మూలములు గుణకారము దృష్ట్యా ఎబిలియన్ సమూహమని చూపండి.

3. Show that if H is a subgroup of a group G then

   i) $HH = H$

   ii) $H = H^{-1}$

   H అనేది G అనే సమూహమునకు ఉపసమూహాము అయితే పై రెండు నిరూపించండి.

4. The intersection of any two normal subgroups is a normal subgroup.

[Turn over

ఒక సమూహములో రెండు అభిలంబ ఉపసమూహాల ఛేదనము ఒక అభిలంబ సమూహము.

5. Show that the groups $G = (\{0,1,2,3\};\ +_4)$ and $G' = (\{1,-1,i,-i\};\times)$ are isomorphic

$G = (\{0,1,2,3\};+_4)$ $G' = (\{1,-1,i,-i\};\times)$, అనే సమూహాలు తుల్య రూపాలు అని చూపండి.

6. Show that if f is a homomorphism of a group G into a group G' then ker f is a normal subgroup of G.

$f : G \to G'$ అనేది సమరూపత అయితే kerf అనేది అభిలంబ ఉప సమూహమని చూపండి.

7. Find A_3, the normal subgroup of S_3.

S_3 యొక్క అభిలంబ ఉపసమూహము A_3, ని కనుగొనుము.

8. Show that the group $G = (\{1,2,3,4,5,6\},x_7)$ is a cyclic; Also write all its generators.

$G = (\{1,2,3,4,5,6\};x_7)$ అనేది చక్రీయము అని చూపండి. దాని జనక మూలకములన్నీ వ్రాయండి.

PART - B

విభాగము - బి

Answer **All** the questions. **(5×10=50)**

ఈ క్రింది అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

9. Show that the set Q^+ of all positive rational numbers form an abelian group w.r.to 'O' defined by

$$aob = \frac{ab}{3}, \forall a,b \in Q^+.$$

ధన అకరణీయ సంఖ్య సమితి Q^+ పై 'O' పరిక్రియ, $\forall a, b \in Q^+$ కు $aob = \frac{ab}{3}$, గా నిర్వచించిన (Q^+, O) ఒక ఎబిలియన్ సమూహమని చూపండి.

OR/లేదా

Show that in a group $G, \forall a, b, x, y \in G$ the equation $ax = b$; $ya = b$ have unique solutions.

$\forall a, b, x, y \in G$ సమూహము G లో మూలకాలైతే $ax = b$; $ya = b$ సమీకరణాలకు ఏకైక సాధన ఉంటుంది అని చూపండి.

10. If H, K are two subgroups of a group G then HK is a subgroup of $G \Leftrightarrow HK = KH$.

H, K లు G అనే సమూహానికి ఉపసమూహాలు అయితే HK ఉపసమూహము $\Leftrightarrow HK = KH$ అవుతుంది.

OR/లేదా

Show that any two left cosets of a subgroup are either identical or disjoint.

ఒక ఉపసమూహము యొక్క ఏవైనా రెండు ఎడమ (కుడి) సహసమితులైనా వియుక్తాలు లేదా సమానాలు.

11. Define Maximal normal subgroup of a group; show that G is a group, H is a subgroup of G with index 2 then H is a normal subgroup of G.

అధిక అభిలంబ ఉపసమూహమును నిర్వచించి; H ,G కి ఒక ఉప సమూహము, H యొక్క సూచిక 2 అయితే G లో H అభిలంబ ఉపసమూహమని చూపండి.

OR/లేదా

If H is a normal subgroup of a group $G \Leftrightarrow$ the product of two right cosets of H in G is again a right Coset of H in G.

[Turn over

H, G కి ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము $\Leftrightarrow G$ లో H యొక్క రెండు కుడి సహసమితుల లబ్ధము G లో H యొక్క ఒక కుడి సహసమితి.

12. Prove that the mapping $f_a : G \to G$ defined by $f_a(x) = a^{-1}xa; \forall x \in G$ is an automorphism of G, where 'a' is a fixed element in G.

'a' అనేది G లో స్థిర మూలకము, $f_a : G \to G$ ను $f_a(x) = a^{-1}xa; \forall x \in G$ గా నిర్వచిస్తే f_a ను స్వయము తుల్యరూపత అని చూపండి.

OR/లేదా

If f is a homomorphism of a group G into G' then prove that f is onto isomorphism $\Leftrightarrow \ker f = \{e\}$.

$f : G \to G'$ ఒక సమరూప సమూహము, f తుల్యరూపత అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $\ker f = \{e\}$

13. The order of a cyclic group is the order of its generators.

ఒక చక్రీయ సమూహము తరగతి దాని జనక మూలకము తరగతికి సమానమగును.

OR/లేదా

Every finite cyclic group G of order 'n' is isomorphic to the group of integers addition modulo n.

G అనేది n తరగతి కలిగిన చక్రీయ సమూహము అయితే G ఉప సమూహాలకు n యొక్క ధన భాజకాలకు మధ్య తుల్యరూపకత ఉండునని తెలపండి.

2017-18.

[Total No. of Printed Pages-7

[CB-BA328/CB-BS332]

AT THE END OF THIRD SEMESTER DEGREE EXAMINATIONS

MATHEMATICS-III-ABSTRACT ALGEBRA

(COMMON FOR B.A. B.Sc)

(From The Admitted Batch of 2015-2016)

(CBCS PATTERN)

Time : 3 Hours　　　　　　　　　　　　Maximum : 75 Marks

Section-A

Answer any **FIVE** questions, each questions carries **FIVE** marks. **(5×5=25)**

ఈ క్రింది వాటిలో **ఏవైనా ఐదు** ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు **ఐదు** మార్కులు.

1. Prove that the set G = {0, 1,2....(m–1)} of first m non-negative integers is an abelian group w.r.t. the operation addition modulo m.

మొదటి ఋణేతర m పూర్ణాంకాల సమితి G = {0,1,2....(m–1)} సంకలన మాపకం m పరిక్రియ దృష్ట్యా వినిమయ సమూహము అని నిరూపించండి.

15000　　　　　　　　　　　　[Turn over

2. Prove that if H_1 and H_2 are two subgroups of a group G then $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of G.

ఒక సమూహము G లో H_1 మరియు H_2 లు ఉపసమూహాలు అయితే $H_1 \cap H_2$ కూడ G లో ఉపసమూహము అవుతుందని నిరూపించండి.

3. Prove that if H is any subgroup of a group (G,.) and $h \in G$. Then $h \in H$ iff $hH = H = Hh$.

సమూహము (G,.) లో H ఏదైనా ఉపసమూహము మరియు $h \in G$ అనుకొనుము. అప్పుడు $h \in H \Leftrightarrow hH = H = Hh$.

4. Use Lagrange's theorem to prove that a finite group cannot be expressed as the union of two of its proper subgroups.

లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి ఏ పరిమిత సమూహమైనా దాని రెండు శుద్ధ ఉపసమూహముల సమ్మేళనముగా వ్రాయలేము అని చూపండి.

5. Prove that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup.

ఒక సమూహము లో రెండు అభిలంబ ఉపసమూహచ్ఛేధనము ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము అవుతుందని నిరూపించండి.

6. Prove that every homomorphic image of an abelian group is abelian.

ఒక వినిమయ సమూహము యొక్క ప్రతి సమరూపతా ప్రతిబింబము ఒక వినిమయ సమూహము అవుతుందని నిరూపించండి.

7. Prove that the necessary and sufficient condition for a homomorphism f of a group G onto a group G' with Kernel K to be an isomorphism of G into G' is that $K = \{e\}$.

సమూహము G నుండి సమూహము G'కు నిర్వచింపబడిన సంగ్రస్త సమరూపత G నుండి G' కు తుల్యరూపత అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $k = \{e\}$ అని నిరూపించండి.

8. Show that the group $(G=\{1,2,3,4,5,6\}, X_7)$ is cydic. Also write down all its generators.

$(G=\{1,2,3,4,5,6\}, X_7)$ అనేది చక్రీయము అని చూపండి దాని జనక మూలకములన్ని వ్రాయండి.

Section-B

Answer the all **FIVE** questions, each question carries **TEN** marks. **(5×10=50)**

9. a) Prove that the Set Z of all integers form an abelian group w.r.t the operations defined by $a*b=a+b+2$, $\forall a, b \in z$.

పూర్ణాంకాల సమితి Z, $a*b=a+b+2$, $\forall a, b \in z$. పరిక్రియ * దృష్ట్యా ఒక వినిమయ సమూహము అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) In a group G $(\neq Q)$ for $a,b,x,y, \in G$, the equation $ax=b$ and $ya=b$ have unique solutions.

ఒక సమూహము G లో $a,b,x,y, \in G$, లకు $ax=b$ మరియు $ya=b$ సమీకరణములకు ఏకైక సాధనములు కలవు అని చూపండి.

10. a) Prove that the union of two subgroups of a group is a subgroup iff one is contained in the other.

ఒక సమూహములో రెండు ఉపసమూహాల సమ్మేళనము ఆ సమూహములో ఉపసమూహము కావలెనన్న ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము ఒకటి ఇంకొక దానిలో ఉపసమితి అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Fundamental theorem on Homomorphism of groups.

సమూహాల యొక్క సమరూపతా మూల సిద్ధాంతము వ్రాసి, నిరూపించండి.

11. a) Prove that the multiplication of disjoint cycles is commutative.

వియుక్త చక్రాల గుణనము (multiplication of disjoint cycles) వినిమయము అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $(1, w, w^2)$

గుణన సమూహాము $(1, w, w^2)$ లో తుల్య రూపత కలిగిన క్రమప్రస్తార సమూహమును కనుక్కోండి.

12. a) Prove that the order of every element of a finite group is finite and is less than or equal to the order of the group.

పరిమిత సమూహములో ప్రతి మూలకపు తరగతి పరిమితము మరియు అది సమూహపు తరగతి కంటే తక్కువ గాని సమానము గాని అగును అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove "LANGRANGE'S THEOREM".

లేగ్రాంజ్ సిద్ధాంతము వ్రాసి నిరూపించండి.

13. a) Prove that the order of a cyclic group is equal to the order of its generator.

ఒక చక్రియ సమూహము తరగతి దాని జనక మూలకము తరగతికి సమానమగునని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Find the number of generators of cyclic group of orders 5,6,8,12,15,60

5,6,8,12,15,60 తరగతులు గల చక్రీయ సమూహములకు జనన మూలకాల సంఖ్యను వ్రాయండి.

2018-19

[Total No. of Printed Pages-7

[CB-BA328/CB-BS332]

AT THE END OF THIRD SEMESTER DEGREE EXAMINATIONS

MATHEMATICS - III - ABSTRACT ALGEBRA

(COMMON FOR B.A, B.Sc)

(From The Admitted Batch of 2015-16)

(CBCS PATTERN)

Time : 3 Hours　　　　Maximum : 75 Marks

SECTION - A

విభాగము - ఎ

Answer any **FIVE** questions. Each question carries **FIVE** marks.

ఏవైనా **ఐదు** ప్రశ్నలకు జవాబులు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు **ఐదు** మార్కులు.

(5×5=25)

1. Prove that cancellation laws hold in a group.

సమూహములో కొట్టివేత న్యాయములు అగునని నిరూపించుము.

2. In a group G for every $a \in G, a^2 = e$. Prove that G is an abelian group.

సమూహము G లో $a \in G$ మరియు $a^2 = e$ అయితే G ఒక వినిమయ సమూహము అని చూపుము.

18,000

[Turn over

3. If H is a subgroup of a group G then prove that $H^{-1} = H$.

సమూహము G నకు H ఒక ఉపసమూహము అయితే $H^{-1} = H$ అని చూపుము.

4. Prove that any two left cosets of a subgroup are either disjoint or identical.

ఒక ఉపసమూహము యొక్క ఏవైనా రెండు ఎడమ సహసమితులు సమానాలు లేదా వియుక్తాలు అని చూపుము.

5. Prove that every subgroup of an abelian group is normal.

వినిమయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము అభిలంబము అని చూపుము.

6. Let f be a homomorphism from a group G into a group G' then prove that f is monomorphism $\Leftrightarrow$ kerf $=\{e\}$ where 'e' is the identity of G.

సమూహము G నుండి సమూహము G' కి f ఒక సమరూపత అయితే f అన్వేక సమరూపత కావటానికి kerf $=\{e\}$ (e అనేవి లోని తత్సమాంశము) ఆవశ్యక పర్యాప్తకము అని చూపుము.

7. Examine whether the following permutations are even or odd.

ఈ క్రింది ప్రస్తారములు సరి లేదా బేసి ని పరీక్షించుము.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 8 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Prove that a group of prime order is cyclic.

అభాజ్య తరగతిగా గల సమూహము చక్రీయ మని చూపుము.

SECTION - B

విభాగము - బి

Answer all the **FIVE** questions. Each question carries **TEN** marks.

ఈ క్రింది **ఐదు** ప్రశ్నలకు జవాబులు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు **10** మార్కులు.

(5×10=50)

9. a) Prove that the set z of all integers form an abelian group w.r.t. the operations defined by $a*b=a+b+2$ *for all* $a,b\in z$

z పూర్ణాంక సంఖ్య సమితి $a*b=a+b+2$ గా నిర్వచింపబడిన, z వినిమయ సమూహము అని చూపుము.

[Turn over

(OR/లేదా)

b) Prove that A finite semigroup $(G, \circ)$ satisfying the cancellation laws is a group.

పరిమిత అర్ధసమూహము కొట్టి వేత న్యాయాలు పాటించిన అవి సమూహము అని చూపుము.

10. a) H is a non-empty complex of a group G. Then prove that the necessary and sufficient condition for H to be a sub group of G is $a, b, \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ *where* b^{-1} is the inverse of b in G.

సమూహము G లో H ఒక శూన్యేతర సంకీర్ణము అయిన H, Gనకు ఉపసమూహము కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ (b^{-1} అనునది b యొక్క విలోమము) అని చూపండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Lagranges theorem of groups.

లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించుము.

11. a) If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G then prove that H is a normal subgroup of G.

G సమూహము మరియు, సూచిక 2 కలిగిన ఉపసమూహము H అయిన H అనునది G కి అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపుము.

(OR/లేదా)

b) A sub group H of a group G is normal iff $xHx^{-1} = H \ \forall x \in G$ prove it.

సమూహము G, కి H ఉపసమూహము అభిలంబముకావటానికి $xHx^{-1} = H \ \forall x \in G$ ఆవశ్యకము మరియు పర్యాప్తకము అని చూపుము.

12. a) Prove that if ϕ is a homomorphism from a group G into a group G' then $\frac{G}{\ker \phi}$ is isomorphic with G'.

ϕ అనేవి సమూహము G నుండి G' నకు ఒక సంగ్రస్త సమరూపత అయితే $\frac{G}{\ker \phi}, G'$ నకు తుల్య సమరూపత అగునని నిరూపించుము.

(OR/లేదా)

b) If $f : G \to \overline{G}$ defined by f(x) = 1 if $x > 0$ and $f(x) = -1$ if $x < 0$ where G = {set of non - zero real numbers } and $\overline{G} = \{1, -1\}$ are groups w.r.t multiplication. Prove that f is a homomorphism and find kernel.

G శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యల సమితి, $\overline{G} = \{1, -1\}$. G, $\overline{G}$ అనేవి గుణకారము దృష్ట్యా సమూహాలు $f : G \to \overline{G}$ ప్రమేయము $f(x) = 1, x > 0$ మరియు $f(x) = -1$ if $x < 0$ అని నిర్వచింప బడితే అవి ఒక సమరూపత అని చూపండి. మరియు దాని కెర్నల్ కనుగొనుము.

13. a) State and prove Cayley's theorem.

కెయిలీ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

(OR/లేదా)

b) Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము చక్రీయము అని చూపుము.

2019 - 2020

0778733

[Total No. of Printed Pages-4

[CB-BA328/CB-BS332]
AT THE END OF THIRD SEMESTER DEGREE EXAMINATIONS
MATHEMATICS-III
ABSTRACT ALGEBRA
(COMMON FOR B.A,B.Sc)
(From The Admitted Batch of 2015-16)
(CBCS PATTERN)

Time : 3 Hours Maximum : 75 Marks

SECTION - A
విభాగము - ఎ

Answer any **FIVE** questions, each question carries **5** marks.

ఏవైనా **ఐదు** ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు **ఐదు** మార్కులు. **(5×5=25)**

1. If G is a group such that $(ab)^m=a^m b^m$ for three consecutive integers m for all $a,b \in G$. Show that G is abelian.

   సమూహము G లో $\forall a,b \in G$ లకు మరియు మూడు వరుస పూర్ణాంకాలకు $(ab)^m=a^m b^m$ అయితే G వినిమయ సమూహమని చూపండి.

2. If H and K are two subgroups of a group G, then Prove that HK is a subgroup of G iff HK=KH.

   ఒక సమూహము G లో H,K లు ఉపసమూహాలయితే, HK కూడ G లో ఉపసమూహము కావలెనన్న ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము HK=KH ని నిరూపించండి.

3. Prove that any two left(right) cosets of a subgroup are either disjoint or identical.

   ఒక ఉప సమూహము యొక్క ఏవైనా రెండు ఎడమ (కుడి) సహసమితులు వియుక్తాలు లేదా సమానాలు అని చూపండి.

4. G is an abelian group. If $a,b \in G$ such that $O(a)=m$, $O(b)=n$ and $(m,n)=1$, then show that $O(ab)=mn$.

   G ఒక వినిమయ సమూహము. $a,b \in G$ కు $O(a)=m$, $O(b)=n$ మరియు $(m,n)=1$ అయిన $O(ab)=mn$ అని చూపండి.

5. Define Normal subgroup. Prove that A subgroup H of a group G is normal, Iff $xHx^{-1} = H \ \forall \ x \in G$
అబిలంబ ఉపసమూహమును నిర్వచించండి, మరియు G లో H అబిలంబ ఉపసమూహము కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $\forall \ x \in G$కి $xHx^{-1} = H$ అని నిరూపించండి.

6. Prove that Every homomorphic image of an abelian group is abelian.
ఒక వినిమయ సమూహము యొక్క ప్రతి సమరూపతా ప్రతిబింబము ఒక వినిమయ సమూహము అవుతుందని నిరూపించండి.

7. Express the product (2,5,4) (1,4,3) (2,1) as a product of disjoint cycles and find its inverse.
(2,5,4) (1,4,3) (2,1) అనే లబ్ధాన్ని వియుక్త చక్రాల లబ్ధముగా వ్రాయుము మరియు దాని విలోమము కనుక్కోండి.

8. Prove that every isomorphic image of a cyclic group is again cyclic.
ఒక చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి సమరూపత ప్రతిబింబము తిరిగి చక్రీయమవుతుంది అని నిరూపించండి.

SECTION - B

విభాగము - బి

Answer All questions, each question carries **10** marks.
అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు **పది** మార్కులు.

(5×10=50)

9. a) Show that Set Q_+ of all +ve rational numbers forms an abelian group under the composition defined by '$\circ$'. Such that $a \circ b = (ab)/3$ for all $a,b \in Q$.
ధన అకరణీయ సంఖ్య, సంఖ్యా సమితి Q_+ పై '$\circ$' ప్రక్రియ $a,b \in Q$ కు $a \circ b = (ab)/3$ గా నిర్వచింపబడిన $(Q_+, \circ)$ ఒక ఎబిలియన్ సమూహము అని చూపండి.

(OR/లేదా)

b) Prove that the set of residue classes modulo m is an abelian group of order 'm' w.r.t addition of residue classes

'm' మాపకము దృష్ట్యా అవశేష వర్గాల తరగతుల సమితి అవశేష వర్గ సంకలనము దృష్ట్యా వినిమయ సమూహము అని నిరూపించండి.

10. a) Prove that the Union of two subgroups of a group is a subgroup iff one is contained in the other.

ఒక సమూహములో రెండు ఉపసమూహాల సమ్మేళనము ఆ సమూహములో ఉపసమూహము కావలెనన్న ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము ఒకటి ఇంకొక దానిలో ఉపసమితి అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Langrange's theorem.

లెంగ్రాంజ్ సిద్దాంతము వ్రాసి నిరూపించండి.

11. a) Prove that the set G/H of all cosets of H in G with respect to coset multiplication is a group, H is a normal subgroup of G.

(G,.)కు H ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము G లోని H యొక్క సహసమితుల సమితి G/H సహసమితుల గుణకారము దృష్ట్యా ఒక సమూహము అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Define maximal subgroup of a group G. Prove that a normal subgroup N of a group G is maximal iff the quotient group G/N is simple.

సమూహము G లో అధికతను అభిలంబ ఉపసమూహము (maximal normal subgroup) నిర్వచించండి. సమూహము G లో వ్యుత్పన్న సమూహము G/N సరళమైన G లో N అధికతను అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపండి.

[Turn over

12\. a) Define Kernel of Homomorphism. And Prove that the necessary and sufficient condition for a homomorphism f of a group G on to group G' with Kernel K to be an isomorphism of G into G' is that K={e}

సమరూత యొక్క కెర్నెల్ లేక అంతస్థమును నిర్వచించండి, మరియు సమూహము G నుండి సమూహము G' కు నిర్వచింపబడిన సంగ్రస్త సమరూపత G నుండి G' కు తుల్యరూపత అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము K={e} (ఇక్కడ K=కెర్ f)అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Theorem on Homomorphism of Groups.

సమూహాల యొక్క సమరూపతా మూలసిద్ధాంతము వ్రాసి నిరూపించండి.

13\. a) Prove that every finite group G is isomorphic to a permutation group.

ప్రతి పరిమిత సమూహము G ఒక ప్రస్తార సమూహముతో తుల్యరూపత కలిగి ఉంటుంది అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Prove that the order of Cyclic group is equal to the order of its generator.

ఒక చక్రీయ సమూహము తరగతి దాని జనక మూలకము తరగతికి సమానమగునని నిరూపించండి.

❄❄❄✡❄❄❄

2020-21

[Total No. of Printed Pages-4

[CB-BA328/CB-BS332]

AT THE END OF THIRD SEMESTER (CBCS PATTERN) DEGREE EXAMINATIONS

MATHEMATICS - III

ABSTRACT ALGEBRA

(COMMON FOR B.A. B.Sc)

(From The Admitted Batch of 2015-2016)

Time : 3 Hours **Maximum : 75 Marks**

SECTION - A

విభాగము - ఎ

Answer any **Five** questions. Each question carries **five** marks. **(5×5=25)**

ఏవైనా **ఐదు** ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు **ఐదు** మార్కులు.

1. Prove that in a group G for every $a \in G$, $a^2=e$ then G is an abelian group.

   సమూహం G లో ప్రతి $a \in G$ కు $a^2=e$ అయితే G వినిమయ సమూహమని చూపండి.

2. Prove that if 'a' is an element of a group G such that $O(a)=n$, then $a^m=e$ if and only if n/m.

   సమూహం G లో మూలకం 'a' యొక్క తరగతి $O(a)=n$ అయితే $a^m=e \Leftrightarrow n/m$ అని నిరూపించండి.

3. If H is any sub group of a group G then prove that $H^{-1}=H$.

   ఒక సమూహము G లో H ఉపసమూహం అయితే $H^{-1}=H$ అని నిరూపించండి.

4. Prove that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal sub group.

   ఒక సమూహంలో రెండు అభిలంబ ఉపసమూహాల ఛేదనము అభిలంబ ఉపసమూహమవుతుందని చూపండి.

[Turn over

5. Prove that every homomorphic image of an abelian group is abelian.

ఒక వినిమయ సమూహము యొక్క ప్రతి సమరూపతా ప్రతిబింబము ఒక వినిమయ సమూహమవుతుందని నిరూపించండి.

6. If for a group G, $f: G \to G$ is given by $f(x) = x^2, \forall x \in G$ is a homomorphism then prove that G is abelian.

సమూహము G లో $f: G \to G$ ప్రమేయము $f(x) = x^2, \forall x \in G$ అని నిర్వచింపబడే ప్రమేయము సమరూపత అయితే G వినిమయమని చూపండి.

7. Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $\{1, w, w^2\}$.

గుణన సమూహము $\{1, w, w^2\}$ లో తుల్య రూపత కలిగిన క్రమ ప్రస్తార సమూహమును కనుక్కోండి.

8. Prove that if a finite group of order 'n' contains an element of order 'n', then the group is cyclic

'n' తరగతి గల పరిమిత సమూహము 'n' తరగతి కలిగిన మూలకమును కలిగి ఉంటె ఆ సమూహము చక్రీయమవుతుందని నిరూపించండి.

SECTION - B

విభాగము -బి

Answer the all **five** questions. Each question carries **Ten** marks. **(5×10=50)**

ఏవైనా **ఐదు** ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు **పది** మార్కులు.

9. a) Prove that a finite semigroup satisfying cancellation laws is a group.

పరిమిత అర్ధ సమూహము లో కొట్టి వేత న్యాయాలు నిజమైతే ఒక సమూహము అవుతుందని చూపండి.

(OR/లేదా)

b) Prove that the set of n^{th} roots of unity under multiplication forms a finite group.

ఒకటి '1' యొక్క n – వ మూలాలతో ఏర్పడిన సమితి గుణకారం దృష్ట్యా ఒక వినిమయ పరిమిత సమూహమవుతుందని నిరూపించండి.

10. a) Prove that the necessary and sufficient condition for a finite complex H of a group G to be a subgroup of G is $a,b \in H \Rightarrow ab \in H$.

ఒక సమూహము G లో పరిమిత కాంప్లెక్స్ H, G లో ఉపసమూహమగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్తనియమము, $a,b \in H \Rightarrow ab \in H$ అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Lagranges theorem.

లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతాన్ని వ్రాసి నిరూపించండి.

11. a) Prove that a sub group H of a group G is a normal subgroup if and only if each left aset of H in G is a right aset of H in G.

G సమూహములో H అభిలంబ ఉపసమూహము కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్తనియమయు G సమూహములో H యొక్క ప్రతి ఎడమ సమితి ఒక కుడి సమితి అవుతుందని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Define normal sub group of a group G. Prove that if M,N are two normal sub groups of a group G such that $M \cap N = \{e\}$, then every element of M commutes with every element of N.

సమూహం G లో అభిలంబ ఉపసమూహమును నిర్వచింపుము. సమూహం

G లో M,N లు $M \cap N = \{e\}$ అయ్యేటట్లున్న అభిలంబ ఉపసమూహాలైతే M లోని ప్రతి మూలకము N లో ప్రతి మూలకం తో వినమయమవుతుందని చూపండి.

12. a) Let G be a group and N be a normal sub group of G. Let f be a mapping from G to G/N defined by f(x)=Nx, for $x \in G$. Then prove that f is a homomorphism of G onto G/N and Kerf =N.

G సమూహంలో N అభిలంబ ఉపసమూహము అనుకొనుము. G నుండి G/N కు f ప్రవేయము f(x)=Nx, $x \in G$ అని నిర్వచింపబడినపుడు G నుండి G/N కు f సంగ్రస్త సమరూపత మరియు Ker f =N అగునని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Fundamental theorem on homomorphism of groups.

సమూహాల యొక్క సమరూపతా మూలసిద్ధాంతాన్ని వ్రాసి నిరూపించండి.

13. a) State and prove cayley's theorem.

కెయిలీ సిద్ధాంతాన్ని వ్రాసి నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Prove that the order of a cyclic group is equal to the order of its generator.

ఒక చక్రీయ సమూహాము తరగతి దాని జనక మూలకం తరగతికి సమానమగునని చూపండి.